Pseudospectres identiques et super-identiques d'une matrice

Thèse

Samir Raouafi

Doctorat en mathématiques
Philosophiæ doctor (Ph.D.)

Québec, Canada

Résumé

Le pseudospectre est un nouvel outil pour étudier les matrices et les opérateurs linéaires. L'outil traditionnel est le spectre. Celui-ci peut révéler des informations sur le comportement des matrices ou operateurs normaux. Cependant, il est moins informatif lorsque la matrice ou l'opérateur est non-normal. Le pseudospectre s'est toutefois révélé être un outil puissant pour les étudier. Il fournit une alternative analytique et graphique pour étudier ce type des cas. Le but de cette thèse est d'étudier le comportement d'une matrice non-normale A en se basant sur le pseudospectre. Il est bien connu que le théorème matriciel de Kreiss donne des estimations des bornes supérieures de $\|A^n\|$ et $\|e^{tA}\|$ en fonction du pseudospectre. En 1999, Toh et Trefethen [31] ont généralisé ce célèbre théorème aux polynômes de Faber et aux matrices ayant des spectres dans des domaines plus généraux. En 2005, Vitse [34] a donné une généralisation du théorème aux fonctions holomorphes dans le disque unité. Dans cette thèse, on généralise le théorème matriciel de Kreiss aux fonctions holomorphes et aux matrices ayant des spectres dans des domaines plus généraux. Certaines conditions devraient cependant être vérifiées.

L'étude du comportement d'une matrice au cas où la valeur exacte de la norme de la résolvante est connue a été aussi remise en question. Il est bien connu que si A et B sont des matrices à pseudospectres identiques, alors

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\|A\|}{\|B\|} \leq 2. \tag{1}$$

Mais, qu'en est-il pour les puissances supérieures $\|A^n\|/\|B^n\|$?

En 2007, Ransford [21] a montré qu'il existe des matrices $A, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ avec des pseudospectres identiques et où $\|A^n\|$ et $\|B^n\|$ peuvent prendre des valeurs aléatoires et indépendantes les unes des autres pour $2 \leq n \leq (N-3)/2$. Serait-il aussi le cas pour n assez grand ? Par ailleurs, le pseudospectre est aussi utilisé pour étudier le semi-groupe e^{tA}, mais permet-il de déterminer $\|e^{tA}\|$?

Cette thèse répond à toutes ces questions en démontrant des résultats plus généraux. Elle généralise l'inégalité (1) aux transformations de Möbius. Elle montre aussi que la condition de pseudospectre identique n'est pas suffisante pour déterminer le comportement d'une matrice. Cependant, la condition de pseudospectre super-identique pourrait l'être.

Abstract

The theory of pseudospectra is a new tool for studying matrices and linear operators. The traditional tool is the spectrum. It reveals information on the behavior of normal matrices or operators. However, it is less informative as the matrix or the operator are non-normal. Pseudospectra have nevertheless proved to be a powerful tool to study them. They provide an analytical and graphical alternative to study this type of case. The purpose of this thesis is to study the behavior of a non-normal matrix A based on its pseudospectra. It is well known that the Kreiss matrix theorem provides estimates of upper bounds of $\|A^n\|$ and $\|e^{tA}\|$ according pseudospectra. In 1999, Toh and Trefethen [31] generalized the celebrated theorem to Faber polynomials and matrices with spectra in more general domains. In 2005, Vitse [34] generalized the theorem for holomorphic functions in the unit disk. In this thesis, the Kreiss matrix theorem is generalized to holomorphic functions and matrices with spectra in more general domains. However, certain conditions should be imposed.

The behavior of a matrix if the exact knowledge of the resolvent norm is assumed has also been questioned. It is well known that if A and B are matrices with identical pseudospectra, then

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\|A\|}{\|B\|} \leq 2. \tag{2}$$

But what about higher powers $\|A^n\|/\|B^n\|$?
In 2007, Ransford [21] showed that there exist matrices $A, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ with identical pseudospectra and where $\|A^n\|$ and $\|B^n\|$ can take more or less arbitrary values for $2 \leq n \leq (N-3)/2$. Is it also the case for large n? Moreover, pseudospectra are also used to study the semigroup e^{tA}, but do they allow us to determine $\|e^{tA}\|$?
This thesis addresses all these issues by demonstrating more general results. It generalizes the inequality (2) to Möbius transformations. It also shows that the condition of identical pseudospectra is not sufficient to determine the behavior of a matrix. However, the condition of super-identical pseudospectra could do so.