Calcul de la capacité analytique et fonctions d'Ahlfors rationnelles

Thèse

Malik Younsi

Doctorat en Mathématiques
Philosophiæ doctor (Ph.D.)

Québec, Canada

Résumé

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact et soit X le complément de K par rapport à la sphère de Riemann, $X := \mathbb{C}_\infty \setminus K$. La *capacité analytique* de K, notée $\gamma(K)$, est définie par

$$\gamma(K) := \sup\{|f'(\infty)| : f \in \mathcal{O}(X, \overline{\mathbb{D}})\},$$

où $\mathcal{O}(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes de X vers Y et

$$f'(\infty) := \lim_{z \to \infty} z(f(z) - f(\infty))$$

représente le coefficient de $1/z$ dans le développement de Laurent de f au voisinage du point ∞ :

$$f(z) = f(\infty) + \frac{f'(\infty)}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

La capacité analytique des sous-ensembles compacts du plan fut introduite par Ahlfors en 1947 dans le but d'étudier un problème dû à Painlevé demandant une caractérisation géométrique des sous-ensembles compacts dits *effaçables*. Le problème de Painlevé se révéla fort difficile et il fallut attendre plus d'un siècle avant d'en obtenir une solution satisfaisante, grâce aux travaux de Xavier Tolsa et plusieurs autres.

La présente thèse de doctorat vise à étudier en détail la capacité analytique. Plus précisément, dans la première partie de la thèse, on développe une méthode efficace et rigoureuse pour le calcul numérique de la capacité analytique. Cette méthode est d'autant plus intéressante qu'il est extrêmement difficile en pratique de déterminer de façon exacte la capacité analytique d'un ensemble compact donné. On utilise ensuite cette méthode, implémentée sur ordinateur à l'aide du logiciel MATLAB, pour étudier le célèbre problème de la sous-additivité de la capacité analytique. Ce problème réputé fort difficile fut énoncé en 1967 par Vitushkin et demeure encore à ce jour sans réponse. Plusieurs expérimentations numériques de même que certains des résultats obtenus mènent à la formulation d'une conjecture qui, si démontrée, impliquerait que la capacité analytique est bel et bien sous-additive. Enfin, on démontre la conjecture dans un cas particulier.

La seconde partie de la thèse est dédiée à l'étude des fonctions d'Ahlfors, fonctions extrémales pour le problème de la capacité analytique. Plus précisément, on s'intéresse à un problème soulevé par Jeong et Taniguchi visant à déterminer les fonctions d'Ahlfors qui sont des fonctions rationnelles. On donne une solution partielle au problème, fournissant ainsi plusieurs nouveaux exemples explicites de fonctions d'Ahlfors et de capacités analytiques.