Antoine Corriveau-La Grenade

Un théorème de point fixe pour les L-plongements

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en mathématiques
pour l'obtention du grade Maître ès Sciences (M.Sc.)

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2012

Introduction

Ce mémoire est une preuve détaillée d'un récent théorème de point fixe pour les L-plongements, démontré par Bader, Gelander et Monod [1] :

Théorème A. *Soit A un sous-ensemble non vide et borné d'un espace de Banach X. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des opérateurs linéaires isométriques sur X qui préservent A. Si X est une L-somme dans X^{**}, alors il existe un point $c \in X$ fixé par tous les éléments de $\mathscr{S}$, et tel que* $\sup_{a\in A} \|c - a\| \leq \sup_{a\in A} \|x - a\|$ *pour tout $x \in X$.*

Nous montrons aussi, tel qu'affirmé par les auteurs de [1], que le théorème s'applique au prédual de toute algèbre de von Neumann :

Corollaire B. *Soit A un sous-ensemble non vide et borné dans le prédual X_* d'une algèbre de von Neumann X. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des opérateurs linéaires isométriques sur X_* qui préservent A. Alors il existe un point $c \in X_*$ fixé par tous les éléments de $\mathscr{S}$, et tel que* $\sup_{a\in A} \|c - a\| \leq \sup_{a\in A} \|x - a\|$ *pour tout $x \in X_*$.*

Le Théorème A est inattendu, en premier lieu, car il diffère des principaux théorèmes de point fixe et de leurs dérivés au niveau des hypothèses : contrairement au théorème de Brouwer, où la compacité est requise, ou encore au théorème de Banach, qui repose sur le principe de contraction, le Théorème A ne fait appel qu'aux propriétés géométriques de l'espace ambiant. Ensuite, comme le mentionnent les auteurs de [1], le Thérorème A étonne à cause d'une obstruction fondamentale dans les espaces L^1 : *tout groupe infini admet une* *action isométrique libre de point fixe sur un sous-ensemble convexe et borné d'un espace* L^1. Finalement, le Théorème A génère un puissant corollaire, dont l'application au fameux problème de dérivation, resté ouvert depuis les années 1960 et résolu seulement en 2008 par Losert [3], permet d'en obtenir une courte preuve.

La plupart des résulats contenus dans ce mémoire sont accompagnés d'une démonstration. Quelques résultats triviaux sont énoncés sans preuve ni référence à une source. Enfin, tout résultat non trivial dont nous n'avons pas jugé utile de recopier ici la preuve est accompagné d'une référence adéquate. Dans ce dernier cas, il s'agira le plus souvent d'un fait bien connu.

Nous présenterons les concepts en ordre décroissant de généralité. Une brève introduction aux espaces topologiques, que nous devons à Munkres [5], fait l'objet du Chapitre 1. Les espaces vectoriels topologiques sont étudiés au Chapitre 2, qui emprunte aux ouvrages classiques de Kelley et Namioka [2], Narici et Beckenstein [7], et Rudin [8]. Le Théorème A est démontré au Chapitre 3, à la manière de la preuve en [1] ; celle-ci repose en partie sur le théorème de point fixe de Ryll-Nardzewski, dont nous inclurons la preuve géométrique de Namioka et Asplund [6]. Nous démontrons le Corollaire B au Chapitre 4, en suivant l'argumentaire de Harmand, D. Werner et W. Werner [4] ; quelques rappels sur les espaces de Hilbert, qui nous parviennent de Rynne et Youngston [9], seront aussi utilisés pour cette preuve.