

PATRICE RIVARD

SUR LA THÉORIE DES DÉRIVÉES HYPERBOLIQUES

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en mathématiques
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2011

©Patrice Rivard, 2011

Résumé

La notion de dérivée hyperbolique est bien connue en théorie géométrique des fonctions et s'applique aux fonctions appartenant à la classe, dite de *Schur*, des fonctions f qui sont analytiques dans le disque unité $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ et telles que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Une fonction appartenant à cette classe est dite une *fonction de Schur*. Le but principal de cette thèse est de présenter une nouvelle théorie, celle des *dérivées hyperboliques d'ordre supérieur* d'une fonction de Schur. Dans ce nouveau contexte, la dérivée hyperbolique précédente est maintenant considérée comme la dérivée hyperbolique d'ordre un.

Différentes applications de ces nouvelles dérivées seront explorées et nous aborderons, notamment, des problèmes d'interpolation : étant donnés des points distincts dans le disque unité, on veut déterminer les fonctions de Schur qui font correspondre ces points vers des points images déterminés, tout en ayant des dérivées prescrites aux points initiaux. Nous nous intéresserons à ces problèmes d'interpolation exprimés en termes des dérivées hyperboliques plutôt qu'en termes des dérivées classiques.

De plus, certains résultats classiques de l'analyse complexe seront traités dans le contexte des dérivées hyperboliques. D'une part, cela permettra de les généraliser dans certains cas et, d'autre part, d'interpréter certains d'entre eux en vertu des dérivées hyperboliques, fournissant ainsi de nouvelles démonstrations plus géométriques de ces résultats. En particulier, une version du théorème de Schwarz–Pick sera donnée pour les dérivées hyperboliques d'ordre supérieur et également une version analogue du lemme de Dieudonné. Finalement, le cas du lemme de Rogosinski sera également traité et nous en donnerons une nouvelle démonstration en utilisant les nouveaux outils développés dans cette thèse.