DOMINIQUE GUILLOT

COMPORTEMENT AU BORD DANS LES ESPACES DE DIRICHLET AVEC POIDS HARMONIQUES ET ESPACES DE DE BRANGES–ROVNYAK

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en mathématiques
pour l'obtention du grade de Philosophia Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2010

Résumé

Dans la première partie, nous étudions le comportement au bord des fonctions dans les espaces de Dirichlet pondérés $D(\mu)$. Une fonction analytique f sur le disque unité appartient à $D(\mu)$ si le carré du module de sa dérivée est intégrable par rapport à la mesure $P\mu \, dA$, où $P\mu$ est l'intégrale de Poisson de la mesure positive μ et dA est la mesure d'aire sur le disque unité. Pour étudier ces fonctions, nous introduisons une capacité c_μ qui généralise la capacité logarithmique. Nous prouvons que c_μ est une capacité au sens de Choquet. Nous montrons que les fonctions de $D(\mu)$ sont quasi-continues par rapport à la capacité c_μ, permettant de définir une fonction $f(e^{i\theta})$ sur le cercle unité à un ensemble de c_μ capacité nulle près. À l'aide de cette fonction, nous pouvons étudier les sous-espaces invariants pour l'opérateur *shift* sur $D(\mu)$. Dans le cas où μ est une somme finie de mesures de Dirac, nous donnons une description complète des sous-espaces invariants.

Dans la deuxième partie, nous étudions les espaces de de Branges–Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est un point non extrême de la boule unité de H^∞. Lorsque μ est une mesure de Dirac, l'espace $D(\mu)$ coïncide avec un tel espace, avec égalité des normes. Nous prouvons que c'est le seul cas possible. Nous étudions ensuite la relation qui existe entre les espaces de Dirichlet et les espaces de de Branges–Rovnyak. Nous prouvons une formule de transfert permettant d'exprimer la norme dans $\mathcal{H}(b)$ comme une intégrale de Dirichlet. Nous montrons aussi une formule pour la norme dans $\mathcal{H}(b)$ analogue à une formule donnée par Shimorin pour l'intégrale de Dirichlet locale. Finalement, nous étudions la validité de l'approximation $f_r(z) = f(rz) \to f(z)$ lorsque $r \to 1^-$ dans $\mathcal{H}(b)$.