

MAHMOOD SHABANKHAH

**Integral means of the derivatives of Blaschke  
products and zero sequences for the Dirichlet space**

Thèse présentée  
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de doctorat en mathématiques  
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL

Décembre 2008

# Résumé

Ce travail s'inscrit dans le cadre général de la théorie des espaces de fonctions holomorphes du disque unité. Depuis son apparition au début du 20<sup>e</sup> siècle, cette théorie a retenu l'attention des analystes. Grâce à leurs travaux, les propriétés et les connections de ces espaces avec des sujets variés en analyse complexe et en théorie des opérateurs sont maintenant largement connues. Malgré tous les progrès faits, il reste encore des problèmes ouverts par rapport à ces espaces qui sont faciles à énoncer mais extrêmement difficiles à résoudre.

La première partie de cette thèse porte sur les moyennes intégrales des dérivées logarithmiques des produits de Blaschke. Plus précisément, nous allons établir de nouvelles estimations pour les moyennes de Hardy et de Bergman pondérées du rapport  $B^\ell/B$  d'un produit de Blaschke  $B$  qui divise son  $\ell$ -ième dérivée,  $\ell \geq 1$ , lorsque les zéros de  $B$  satisfont une condition de séparation de type hyperbolique. En suite, nous allons montrer que nos estimations entraînent et généralisent les résultats classiques connus sur ces moyennes. Notre approche est basée sur une technique qui a été récemment développée par Javad Mashreghi, mon directeur de thèse, et Emmanuel Fricain.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous allons aborder la question de la caractérisation des zéros de l'espace de Dirichlet classique  $\mathcal{D}$ . En effet, cette question est extrêmement difficile et reste toujours ouverte. Cependant, en procédant par une nouvelle approche, nous allons obtenir des conditions suffisantes pour qu'une suite soit une suite de zéros pour  $\mathcal{D}$ . De plus, nous allons donner une caractérisation de certains sous-ensembles du cercle unité, appelés les ensembles de Carleson, en termes de leurs sous-suites convergentes. Cette caractérisation donne lieu à quelques résultats intéressants sur les zéros de  $\mathcal{D}$ . Dans un premier temps, nous allons obtenir une caractérisation des sous-ensembles  $E$  du cercle unité qui ont la propriété suivante: toute suite de points dont les arguments sont dans  $E$  et qui est une suite de Blaschke, est nécessairement une suite de zéros pour  $\mathcal{D}$ . Dans un deuxième temps, nous allons obtenir un nouveau critère pour les ensembles de Blaschke de  $\mathcal{D}$ .

# Abstract

This work lies within the general setting of the theory of spaces of holomorphic functions of the unit disk. From its apparition in the beginning of the 20th century, this theory has attracted the attention of analysts. Thanks to their pioneering works, the properties and the connections of these spaces to various subjects in complex analysis and operator theory are now largely known. However, despite all the progress, there still remain many open problems related to these spaces which are easy to state but extremely difficult to resolve.

The first part of this dissertation studies various integral means of the logarithmic derivatives of Blaschke products. More precisely, we establish new upper bounds for Hardy and weighted Bergman means of the ratio  $B^\ell/B$  of a Blaschke product  $B$  dividing its  $\ell$ -th derivatives when the zeros of  $B$  satisfy a hyperbolic type separation condition. We shall show that our estimates unify and generalize previously known results on this subject. Our approach is based on a technique which is recently developed by Javad Mashreghi, my thesis advisor, and Emmanuel Fricain.

The second part of this dissertation studies the question of the characterization of the zero sequences of the classical Dirichlet space  $\mathcal{D}$ . In fact, this question is extremely difficult and still remains open. Nevertheless, using a new approach, we will obtain sufficient conditions under which a sequence is necessarily a zero sequence for  $\mathcal{D}$ . Moreover, we shall give a characterization of certain subsets of the unit circle, called Carleson sets, in terms of their convergent sequences. This characterization, as we shall show, leads to a few interesting results on the zeros of  $\mathcal{D}$ . Firstly, we characterize subsets  $E$  of the unit circle which have the following property: every sequence of points whose arguments lie in  $E$  and which is a Blaschke sequence, is necessarily a zero sequence for  $\mathcal{D}$ . Secondly, we obtain a new criteria for the Blaschke sets of  $\mathcal{D}$ .